数理解析研究所講究録
102巻 1970年 41-57

柱状領域の変形によるΔの摂動について

東大大学院　植松日子太郎

§1. 序

semi-infinite cylinder $S = \{x = (\hat{x}, x_n)\ ;\ \hat{x} \in \ell,\ x_n \geq 0\}$

ℓ ; $n-1$ dimentional bounded domain

でのΔと，その変形した領域Ωでのムを比較する．

Goldstein (1) がこの問題をあつかっているが Ωが

$\Omega \subset S$ かつ $x_n \geq k > 0$ で $\Omega = S$ というつよい制限なので それより一般の場合を考える．その方法はΩからSへの変数変換を考えて，ΔをSでの2階微分作用素にunitary変換して，この2階微分作用素とSでのΔとを比較する．このとき証明の方法は Kuroda (3) の方法をつかう．

§2.

記号と定義

$$\mathcal{H} = L^2(S)\ ,\qquad \|f\|^2_{\mathcal{H}} = \int_S |f(x)|^2\,dx$$

$$H_1 u = -\Delta u \qquad \mathscr{D}(H_1) = \mathscr{D}_{L^2}^1(S) \cap \mathscr{E}_{L^2}^2(S)$$

ここで、goldstein より

$$h_\ell u = -\Delta u \qquad u \in \mathscr{D}_{L^2}^1(\ell) \cap \mathscr{E}_{L^2}^2(\ell)$$

とおき、h_ℓ の固有値 $\{\nu_n\}$, $(\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \cdots)$,

固有函数 $\{\eta_n(\tilde{x})\}$ とすると

$$(T_0 g)_m(\xi) = \lim_{L\to\infty} \int_\ell \int_0^L \overline{w_m^0(x;\xi)}\, g(x)\, dx$$

$$w_m^0(x;\xi) \equiv \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin \xi x_n \cdot \eta_m(\tilde{x})$$

とおけば、T_0 は

$$L^2(S) \to \sum^{\infty} \oplus L_2(0,\infty) \equiv H'$$

への Unitary operator で　$T_0 H_1 f = \left\{ (\xi^2 + \nu_m)(T_0 f)_m(\xi) \right\}$

そこで、各 m ごとに $\xi^2 + \nu_m = \mu$ と変数変換を考えて

次のように定義する

def.

$$F g = \left\{ (T_0 g)_m((\mu - \nu_m)^{1/2}) \frac{1}{2^{1/2}(\mu - \nu_m)^{1/4}} \right\} \quad \text{とおく}$$

F は

$L^2(S') \to H \equiv \oplus L^2(\nu_m, \infty)$ への Unitary operator で

$$F H_1 f = \left\{ \mu (F f)_m(\mu) \right\} \qquad \text{但し} \ \| \{f_n\} \|_H^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\nu_m}^{\infty} |f_m(\mu)|^2 d\mu$$

すなわち F は非摂動作用素 H_1 のスペクトル表示を与えると考えられる。

さて，　　　　　　$u \in \mathcal{D}_{L^2}^1(S) \cap \mathcal{E}_{L^2}^2(S)$ として，

$$H_2 u = -\sum_{i,k}^{n} \partial_i a_{ik}(x) \partial_k u + q(x) u$$

ここで，　$\alpha_{ik}(x) = \delta_{i,k} - a_{i,k}(x)$ とおき，

条件 1.

$\{\alpha_{ik}(x)\}$ real uniformly positive definite symmetric matrix valued smooth function,

$q(x)$ は smooth function,　かつ

$$|q(x)| \leq \frac{C}{(1+x_n)^\alpha}, \quad |\alpha_{ik}(x)| \leq \frac{C}{(1+x_n)^\alpha}$$

$$\alpha > 0$$

定理 1.

上の条件の $\alpha > 1$

$\Rightarrow$　H_1 と $H_{2,ac}$ は unitary 同値.

さらに

条件 2　$\left| \partial_k \alpha_{kj}(x) \right| \leq \dfrac{C}{(1+x_n)^\alpha}$ となる $\alpha > 1$ が存在.

ならば　以下のことがなりたつ.

(i)　函数 $w_m(x;\xi)$ が存在して次の性質をみたす
($m = 1, 2, 3, \cdots$)

a)　$\dfrac{w_m(x;\xi)}{(1+x_n)^{1+\varepsilon}} \in L^2(S)$　　$\forall \varepsilon > 0$

b) $\chi(x)\, W_m(x;\xi) \in \mathcal{D}_{L^2}^1(S) \cap \mathcal{E}_{L^2}^2(S)$

但し
$$\chi(x) = 1 \quad 0 < x_n \leq a \qquad \chi(x) \in \mathcal{E}^\infty$$
$$= 0 \quad b \leq x_n \qquad 0 < a < b$$

a, b は任意にとれる.

c)
$$-\sum_{i,k}^{n} \partial_i a_{ik}(x)\, \partial_k W_m(x;\xi) + q(x)\, W_m(x;\xi) = (\xi^2 + \nu_m) W_m(x;\xi)$$

(ii) $\forall u \in \mathcal{H}_{2,ac}$ に対して ($\mathcal{H}_{2,ac}$ は H_2 に関する絶対連続部分空間)

$$Tu = \{\hat{u}_m(\xi)\} = \lim_{L\to\infty} \left\{ \int_0^L \int_e u(x)\, \overline{W_m(x;\xi)}\, dx \right\}$$

とおく. 但し l.i.m は $H' = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_2(0,\infty)$ の意味

$$\|\{f_n\}\|_{H'}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty |f_n(\xi)|^2 d\xi$$

T は $\mathcal{H}_{2,ac}$ から H' の上への Unitary operator となる

iii)

$u \in \mathcal{H}_{2,ac} \cap \mathcal{D}(H_2)$ に対して

$$(H_2 u)^\wedge_m(\xi) = (\xi^2 + \nu_m)\, \hat{u}_m(\xi)$$

定理 2.

条件 1 が $\alpha > 2$ に対してなりたつ

$\Longrightarrow$ H_2 の singular spectrum は $(0, \infty)$ で discrete.

まず定理1の前半の部分の証明をする。

$$H_2 u = H_1 u + \mathcal{A}^* C \mathcal{A} u \qquad u \in \mathcal{D}_{L^2}^1(S) \cap \mathcal{E}_{L^2}^2(S)$$

とかく

ここで、

def. $\quad \mathcal{A} \ ; \ \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}' \equiv \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}}_{n+1}$

$$\mathcal{A} u = (A_1 u, A_2 u, \cdots\cdots, A_{n+1} u)$$

但し $\quad A_j u = \dfrac{\sqrt{-1}}{(1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}}} \partial_j u \ , \quad A_{n+1} u = \dfrac{1}{(1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}}} u$

$$C \ ; \ \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}' \qquad \mathfrak{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}) \in \mathcal{H}' \text{ に対して}$$

$$C \mathfrak{u} = \left(\sum_{j=1}^{n+1} C_{1j} u_j, \ \cdots\cdots\cdots, \ \sum_{j=1}^{n+1} C_{n+1,j} u_j \right)$$

ここで、

$$C_{ij} u(x) = \alpha_{ij}(x)(1+x_n)^{\alpha} u(x) \quad (1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$$

$$C_{n+1,n+1} u(x) = \beta(x)(1+x_n)^{\alpha} u(x)$$

$$C_{i,n+1} u(x) = 0 \qquad (1 \le i \le n)$$

さて一般に operator T の closure を T^a とかく。

又 $\qquad (H_1 - z)^{-1} = R_1(z) \quad$ とかく。

定理1の前半の部分は Kuroda より $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ で、

$$[\mathcal{A} R_1(-1) R_1(z) \mathcal{A}^*]^a \ ; \ \text{compact operator}$$

と，　$z = \lambda + i\varepsilon$ とするとき，

$[\mathcal{A} R_1(-1) R_1(z) \mathcal{A}^*]^a$ が $\varepsilon \to \pm 0$ のときノルムの意味で極限値をもつことをいえばよい。

（注意．$[\mathcal{A} R_1(z) \mathcal{A}^*]^a$ が compact がいまの場合示せないので $[\mathcal{A} R_1(-1) R_1(z) \mathcal{A}^*]^a$ を考えることになる）

以下　上の二つを目標にする．

def.　$\nu_N < \lambda < \nu_{N+1}$ のとき

$$G(\lambda) h = \{ h_1(\lambda), \cdots\cdots, h_N(\lambda), 0, 0, \cdots\cdots \}$$

$$h \in S = \{ \{s_x\} \,;\; \|s_x\|_H < \infty \text{ かつ } s_x \text{; continuous function} \}$$

$G(\lambda)$ は S から l^2 への operator

def.

$$T_i(\lambda) u = G(\lambda) F(A_i^* u)$$

もちろん，すべての $u \in L^2(S)$ について $T_i(\lambda) u$ が定義できるとはかぎらないが，次の lemma 1 より実は可能．

lemma 1.

条件 1 の $\alpha > 1$,　$\nu_N < \lambda < \nu_{N+1}$

$$\Rightarrow \quad \|T_i(\lambda) u\|_{l^2} \leq \frac{C_N}{(\lambda - \nu_N)^{1/4}} \|u\|_{\mathcal{H}}$$

C_N は $\lambda \in (\nu_N, \nu_{N+1})$ によらない。

証明. $u \in C_0^{\infty}(S)$ とする.

定義より

$$\|T_i(\lambda)u\|_{\ell^2}^2 = \sum_{m=1}^{N} |(FA_i^* u)_m(\lambda)|^2$$

$$\|(FA_i^* u)_m(\lambda)\|^2 = \left|\int \overline{w_m^0(x;(\lambda-\nu_m)^{1/2})} A_i^* u(x)dx\right|^2 \frac{1}{2(\lambda-\nu_m)^{1/2}}$$

$1 \leq i \leq n$ のとき.

$$A_i^* u(x) = \sqrt{-1}\,\partial_i \frac{1}{(1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot u(x)$$ だから部分積分より

$$|(FA_i^* u)_m(\lambda)|^2 = \begin{cases} \left|\sqrt{-1}\int\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin((\lambda-\nu_m)^{1/2}x_n)\partial_i \eta_m(\tilde{x})\frac{1}{(1+x_n)^{\alpha/2}} \cdot u(x)\,dx\right|^2 \frac{1}{2(\lambda-\nu_m)^{1/2}} & i \neq n \\ \left|\sqrt{-1}\int\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(\lambda-\nu_m)^{1/2}\cos((\lambda-\nu_m)^{1/2}x_n)\cdot \eta_m(\tilde{x})\frac{1}{(1+x_n)^{\alpha/2}}u(x)dx\right|^2 \frac{1}{2(\lambda-\nu_m)^{1/2}} & i = n \end{cases}$$

したがって $\alpha > 1$ なる Schwarz の不等式より

$$\|T_i(\lambda)u\|_{\ell^2} \leqq \frac{C_N}{(\lambda-\nu_N)^{1/4}}\|u\|_{\mathcal{H}}$$

$T_{n+1}(\lambda)$ のときも同様.

そこで $T_i(\lambda)$ は $\mathcal{H}$ から ℓ^2 への bounded operator に拡張できる.

lemma 2.

$(1+x)^{\alpha} \cdot f(x) \in L^2(R^1)$ とする

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} \sin\xi x \cdot f(x)dx$$ とおく

このとき次のことがなりたつ.

a) $\alpha > \frac{1}{2}$ なる $|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| \leqq C h^{\delta}$ $\exists\delta > 0$

b) $\alpha > 1$ なら $|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| \leq C h^{\delta}$ $\exists \delta > 1/2$

証明

$$\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi) = \int_0^\infty (\sin(\xi+h)x - \sin\xi x)\cdot f(x)\,dx$$

$$= \int_0^N (\sin(\xi+h)x - \sin\xi x) f(x)dx + \int_N^\infty (\sin(\xi+h)x - \sin\xi x) f(x)dx$$

$$\equiv I_N \quad + \quad II_N$$

$1 < 2\alpha < 3$ なら

$$|I_N| \leq h\int_0^N |x f(x)|dx \leq h\left(\int_0^N \frac{x^2}{(1+x)^{2\alpha}}dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^N (1+x)^{2\alpha}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

$$\leq C\, h\cdot N^{\frac{-2\alpha+3}{2}}\left(\int_0^\infty (1+x)^{2\alpha}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

$$|II_N| \leq 2\left(\int_N^\infty \frac{dx}{(1+x)^{2\alpha}}\right)^{1/2}\left(\int_N^\infty (1+x)^{2\alpha}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{2}{N^{\frac{2\alpha-1}{2}}}\left(\int_0^\infty (1+x)^{2\alpha}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

ここで $N = h^{-1}$ ととると $|I_N| \leq C h^{\frac{2\alpha-1}{2}}$, $|II_N| \leq C h^{\frac{2\alpha-1}{2}}$

よって、 $|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| \leq C\cdot h^{\frac{2\alpha-1}{2}}$

$\alpha > 1$ なら $\frac{2\alpha-1}{2} > \frac{1}{2}$ だから結論を得る。

lemma 3

条件1の $\alpha > 1$

$\Rightarrow$ $T_i(\nu)$ は各区間 $(\nu_N\ \nu_{N+1})$ でノルムの意味で

Hölder 連続

とくに　条件1の $\alpha > 2$

$$\Longrightarrow \quad \| T_i(\lambda+h) - T_i(\lambda) \| \leqq C\, h^{\delta} \qquad \delta > \frac{1}{2}$$

証明

$T_i(\lambda)$の定義と lemma 2 よりいえる.

lemma 4.

各λに対して $T_i(\lambda)$; compact，但し $\lambda \neq \nu_j$

証明

定義より $T_i(\lambda)$は l^2の中の有限次元部分空間にうつす

さて def. $\mathcal{Y}(\lambda)u = \sum_{i=1}^{N+1} T_i(\lambda) u_i \qquad u \in \mathcal{H}, \ \nu_N < \lambda < \nu_{N+1}$

上の lemma 1, 3, 4 より

lemma 5.

条件1の $\alpha > 1$ より

$$\Longrightarrow \quad \| \mathcal{Y}(\lambda) u \|_{l^2} \leqq \frac{C_N}{(\lambda - \nu_N)^{1/4}} \| u \|_{\mathcal{H}}, \qquad \nu_N < \lambda < \nu_{N+1}$$

かつ　$\mathcal{Y}(\lambda)$ は compact operator

かつ

$$\| \mathcal{Y}(\lambda+h) - \mathcal{Y}(\lambda) \| \leqq C \cdot h^{\delta} \qquad \delta > 0$$

とくに $\alpha > 2$ ならば 上の式の δを $\frac{1}{2}$より大きくとれる

さて H_1の単位の分解を $E_1(\lambda)$とかく

lemma 6.

$$\left[\mathcal{A}\, E_1(I)\, \mathcal{A}^*\right]^a = \int_I \mathcal{Y}(\lambda)^* \mathcal{Y}(\lambda)\, d\lambda$$

I : 有限区間

証明.

$\nu_N < \lambda < \nu_{N+1}$ とする

$\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in C_0^\infty \equiv \underbrace{C_0^\infty(S) \oplus C_0^\infty(S) \oplus \cdots \oplus C_0^\infty(S)}_{n+1\text{コ}}$ とする.

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\left(R_1(\lambda+i\epsilon) - R_1(\lambda-i\epsilon)\right)\mathcal{A}^*\mathfrak{u},\ \mathcal{A}^*\mathfrak{v}\right)_{\mathcal{H}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(F\left(R_1(\lambda+i\epsilon) - R_1(\lambda-i\epsilon)\right)\mathcal{A}^*\mathfrak{u},\ \mathcal{A}^*\mathfrak{v}\right)_{H}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{\nu_m}^{\infty}\frac{\varepsilon}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}(FA_i^* u_i)_m(\mu)\cdot\overline{\sum_{i=1}^{n+1}(FA_i^* v_i)_m(\mu)}\, d\mu$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{m=N+1}^{\infty} \quad ''$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \sum_{m=1}^{N}\sum_{i=1}^{n+1}(FA_i^* u_i)_m(\mu)\cdot\overline{\sum_{i=1}^{n+1}(FA_i^* v_i)_m(\mu)}$$

$$= \left(\mathcal{Y}(\lambda)\mathfrak{u},\ \mathcal{Y}(\lambda)\mathfrak{v}\right)_{\ell^2}$$

lemma 7. $\operatorname{Im} z \neq 0$,

$$\left[\mathcal{A}\, R_1(-1)\, R_1(z)\, \mathcal{A}^*\right]^a \text{ ; compact operator.}$$

証明.

あきらかに $a>0$, $b>0$ が存在して

$$\|A_i u\|_{\mathcal{H}} \leq a\|H_1^{1/2} u\|_{\mathcal{H}} + b\|u\|_{\mathcal{H}}$$

これより

$$\mathcal{A} R_1(-1)^{1/2} R_1(z)^{1/2} (1 - E_1(\lambda)) \to 0 \quad \text{as } \lambda \to \infty$$

よって

$$[\mathcal{A} R_1(-1) R_1(z)(1 - E_1(\lambda)) \mathcal{A}^*]^a \to 0 \quad \text{as } \lambda \to \infty$$

一方 lemma 6 より

$$[\mathcal{A} R_1(-1) R_1(z) E_1(\lambda) \mathcal{A}^*]^a = \int_0^\lambda \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{1}{\mu - z} \mathcal{Y}(\mu)^* \mathcal{Y}(\mu) d\mu$$

したがって lemma 5 より

$$[\mathcal{A} R_1(-1) R_1(z) E_1(\lambda) \mathcal{A}^*]^a \quad \text{compact}$$

以上で証明された.

lemma 8

$[\mathcal{A} R_1(-1) R_1(\lambda + i\varepsilon) \mathcal{A}^*]^a$ は $\varepsilon \to \pm 0$ のとき

ノルムの意味で極限値をもつ.

証明　Kato (4) 参照.

lemma 7. 8 より定理 1 の前半は証明された.

なお定理 2 も lemma 5 と Kuroda (5) の定理より証明された.

定理 1 の後半の部分の証明をする.

まず

$$H_2 u = H_1 u + \mathcal{A}\mathcal{B} u \qquad u \in \mathcal{D}_{L^2}^1(S) \cap \mathcal{E}_{L^2}^2(S)$$

とかく.

ここで def. $\mathcal{A}\mathfrak{u} = A\sum_{i=1}^{m} u_i \qquad \mathfrak{u} \in \sum^{m} \oplus \mathcal{H} \qquad m = n^2 + n + 1$

A は $\dfrac{1}{(1+x_n)^{\alpha}}$ をかけるかけざん作用素

$$\mathcal{B} \; ; \; \mathcal{H} \longrightarrow \sum^{m} \oplus \mathcal{H}$$

$$\mathcal{B}u = (B_{11}u, \cdots, B_{ij}u, \cdots, B_{nn}u, B_1 u, \cdots B_n u, B_{n+1}u)$$

ここで

$$\begin{cases} B_{i,j}\, u(x) = (1+x_n)^{\alpha/2}\, \alpha_{ij}(x)\, \partial_i \partial_j u(x) & 1 \le i \le n \\ & 1 \le j \le n \\ B_j u(x) = (1+x_n)^{\alpha/2}\, B_j(x)\, \partial_j u(x) & 1 \le j \le n \\ \quad \text{但し} \quad B_j(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial \alpha_{kj}(x)}{\partial x_k} & \\ B_{n+1} u(x) = q(x)\cdot(1+x_n)^{\alpha/2}\, u(x) & \end{cases}$$

こうして

$\mathcal{B}R_1(-1)R_1(z)\mathcal{A}$; compact operator, $\operatorname{Im} z \neq 0$

$\mathcal{B}R_1(-1)R_1(\lambda+i\varepsilon)\mathcal{A}$ がノルムの意味で極限値をもつ

ことを前と同様にして証明する.

さらに

$$X = R(\mathcal{A}) = \{u(x) ; \; (1+x_n)^{\alpha/2} u(x) \in L^2(S)\}$$

とおけば, $W_m^0(x ; \xi) \in X^*$

したがって Kuroda(3) より結論を得る.

但し定理1の i) の b) については次の lemma 9 で証明を与える.

lemma 9

$$\chi(x)\, w_m(x,\xi) \in \mathcal{D}_{L^2}^1(S) \cap \mathcal{E}_{L^2}^2(S)$$

$$\text{但し}\quad \chi(x) = 1 \quad 0 \leq x_n \leq a \qquad \chi(x) \in \mathcal{E}^\infty$$
$$= 0 \quad x_n \geq b \qquad 0 < a < b$$
$$(\ a,\ b\ \text{は任意})$$

証明　まず Kuroda の一般論から

$$(H_2 y(x),\ w_m(x,\xi)) = (y(x),\ (\xi^2 + \nu_m)\, w_m(x,\xi))$$
$$\text{但し}\quad (f, g) = \int_S f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

が次の条件をみたすすべての $y(x)$ についてなりたつ.

$$\begin{cases} y(x) \in \mathcal{D}_{L^2}^1(S) \cap \mathcal{E}_{L^2}^2(S) \\ y(x) = 0 \qquad x_n \geq c \qquad (c > 0\ \text{は任意}) \end{cases}$$

まず簡単のために $w_m(x;\xi) = \phi(x)$, $\xi^2 + \nu_m = \omega$ とかく。

$\chi(x) = 0$　$x_n \geq b$ であるが, この b をとり,

$$\Omega_b \equiv \{ x = (\tilde{x}, x_n) \in \underline{S},\ 0 < x_n < b \}\ \text{とおく.}$$

さて任意の $z(x) \in \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega_b) \cap \mathcal{E}_{L^2}^2(\Omega_b)$ に対して

$\chi(x) z(x)$ は上の条件をみたす.

そこで,　$(H_2 \chi z,\ \phi) = (\chi z,\ \phi)$

これより,

$$((H_2+tI)\chi\zeta,\ \phi) = (\chi\zeta,\ (w+t)\phi)$$

さて $\chi(x)$ の support は Ω_β に含まれるから

H_2 を $L^2(\Omega_\beta)$ での微分作用素とみて

$$\langle (H_2+tI)\zeta,\ \chi\phi\rangle = \langle \chi\zeta, (w+t)\phi\rangle - \langle \tilde{H}_2\zeta, \phi\rangle$$

但し $\langle f, g\rangle \equiv \int_{\Omega_\beta} f(x)\overline{g(x)}dx$, $H_2\chi\zeta = \chi H_2\zeta + \tilde{H}_2\zeta$

そこで, $v \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega_\beta)$ に対し

$F(v) \equiv \langle \chi v, (w+t)\phi\rangle - \langle \tilde{H}_2 v, \phi\rangle$ とおく.

$\tilde{H}_2$ は一階微分作用素だから F は $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega_\beta)$ 上の連続一次形式.

ところで t を十分大きくとって

$$\|v\|^2_{\mathcal{H}_\beta} \equiv \sum_{i,j} -\langle a_{ij}\partial_i v, \partial_i v\rangle + \langle (g+t)v, v\rangle$$

とおけば $\|\ \|_{\mathcal{H}_\beta}$ は $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega_\beta)$ と同等なノルムになる。

そこで Riez の定理より $F(v) = (v,\ u)_{\mathcal{H}_\beta}$ $\exists u \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega_\beta)$

v として ζ をとれば $F(\zeta) = \langle (H_2+tI)\zeta, \chi\phi\rangle$ だから

$$\langle (H_2+tI)\zeta, \chi\phi\rangle = (\zeta, u)_{\mathcal{H}_\beta} = \langle (H_2+tI)\zeta,\ u\rangle$$

$\therefore\ \chi\phi = u$ 　　これより結論を得る.

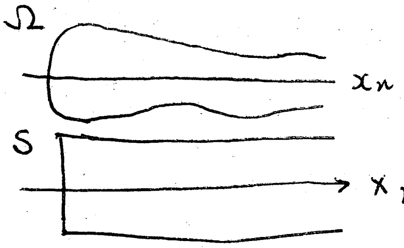
§3.

変形した柱状領域 Ω を考える. $\partial\Omega$ なめらか.

def. $\hat{H}u = -\Delta u$ 　　$u \in \mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega) \cap \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$

Ω から S へのなめらかな変数変換, $(x_1, \cdots, x_n) \to (X_1, \cdots, X_n)$ を考える.

def. $f\in L^2(\Omega)$ に対して $(Uf)(x_1\cdots x_n)\equiv f(\chi_1,\cdots \chi_n)|D|^{1/2}$



$$|D| = \frac{\partial(\chi_1\cdots\chi_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}$$

このとき U は $L^2(\Omega)\to L^2(S)$ への Unitary Operator となる.

さて $L^2(S)$ での operator H_2 を $H_2=U\hat{A}U^{-1}$ で定義する。

$$H_2 u = -\sum_{i,k}\partial_i\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial\chi_\ell}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial\chi_\ell}\right)\partial_k u - \frac{3}{4}|D|^{-2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial|D|}{\partial x_i}\circ u + \frac{1}{2}|D|^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2|D|}{\partial x_i^2}u$$

定理3 次の条件をみたす変数変換が存在するような Ω に対して, 以下のことがなりたつ. ∘ $\hat{H}_{a.c}$ と H_1 は Unitary 同値.

i) 函数 $w_m(x,\xi)$ が存在して次の性質をみたす a) $\dfrac{w_m(x,\xi)}{(1+x_n)^{1+\varepsilon}}\in L^2(\Omega),\ {}^\forall\varepsilon>0$

b) $\chi(x)w_m(x,\xi)\in\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)\cap\mathcal{E}_{L^2}^2(\Omega)$ c) $-\Delta w_m(x,\xi)=(\xi^2+\nu_m)w_m(x,\xi)$

但し $\chi(x)=1$ $0\le x_n\le a$, $\chi(x)=0$ $b\le x_n$ $0<a<b$ $\chi(x)\in\mathcal{E}^\infty$

ii) $\forall u\in\mathcal{H}_{ac}$ ($\mathcal{H}_{ac}$ は $\hat{A}$ に関する絶対連続部分空間) に対して

$$Tu=\{\hat{u}_m(\xi)\}=\lim_{L\to\infty}\left\{\int_0^L\left(\int u(x)\overline{w_m(x,\xi)}\,dx'\right)dx_n\right\}$$

とおくと, T は $\mathcal{H}_{ac}$ から H' の上への Unitary Operator となる

iii) $u\in\mathcal{H}_{ac}\cap\mathcal{D}(\hat{A})$ に対して $(\hat{A}u)^{\wedge}_m(\xi)=(\xi^2+\nu_m)\hat{u}_m(\xi)$

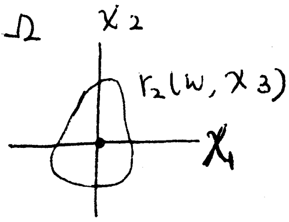
条件,

$$\left|(\tilde{D}\tilde{D}^t-E)_{ij}\right|,\ \left|\frac{\partial|D|}{\partial x_i}\right|,\ \left|\frac{\partial^2|D|}{\partial x_i^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\chi_i}{\partial x_\ell\partial x_k}\right|,\ が$$

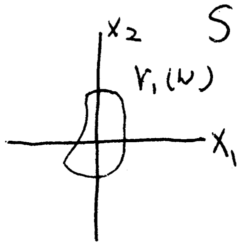
いずれも $\dfrac{C}{(1+x_n)^\alpha}$, $\alpha>1$ でおさえられる $\tilde{D}_{ij}\equiv\dfrac{\partial\chi_i}{\partial x_j}$

例.

Ω



Ωは左図のような領域とする。$\Omega \subset R^3$
但しある $k>0$ に対して $x_3 \geq k$ では
x_3軸を軸として半径 a の円筒がΩの中にはいるものとする。 Sは右図で与える。



定理4.

$$|r_1 - r_2|,\ \left|\frac{\partial r_1}{\partial w} - \frac{\partial r_2}{\partial w}\right|,$$
$$\left|\frac{\partial^2 r_1}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 r_2}{\partial w^2}\right|,\ \left|\frac{\partial r_2}{\partial x_3}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 r_2}{\partial x_3^2}\right| \text{ が}$$

いずれも, $\dfrac{C}{(1+x_3)^\alpha}$. $\alpha>1$ でおさえられる.

$\Longrightarrow$ 定理3の条件をみたす

証明.

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \qquad w = \arctan\frac{x_2}{x_1},$$
$$s = (X_1^2 + X_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{w} = \arctan\frac{X_2}{X_1}$$

と円筒座標をとって, x_3の大きいところで変数変換

$$\begin{cases} s = \left\{ \dfrac{r_1(w)}{r_2(w; x_3)} - 1 \right\} r\varphi(r) + r \\ \tilde{w} = w \\ X_3 = x_3 \end{cases} \qquad \varphi \in \mathcal{E}^\infty \quad \begin{cases} \varphi(r) = 0 & r \leq \frac{a}{2} \\ \quad\ = 1 & r \geq a \end{cases}$$

を考えて計算すればよい.

Reference

(1). C. I. Goldstein.
Eigenfunction Expansions associated with the Laplacian for certain domains with infinite ~~boundaries~~
Transactions of A. M. S. 1969 Vol. 135

(2) Yosio Kato and S. T. Kuroda
The abstract theory of Scattering
lecture Notes

(3) S. T. Kuroda
Perturbation of Eigenfunction Expansions
Vol 57. NO5, May 1967.

(4) Yosio Kato
Some results on potential Scattering
Reprinted from the Proceedings of the International analysis and Related Topics, Tokyo April. 1969.

(5) S. T. Kuroda.
A stationary method of Scattering and some applications. 同上. ((4) と同じ)